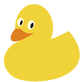
ENS de Lyon — Algèbre 1

L3 — 2023-2024

# TD 6 : Transposition, orthogonalité, et formes bilinéaires

Les exercices marqués d'un  seront corrigés en TD, si le temps le permet.

Soit $K$ un corps. Sauf mention du contraire, tous les espaces vectoriels considérés seront des $K$-espaces vectoriels.

## Exercice 1.

Soit $E$ un espace vectoriel et soient $G \subset F$ des sous-espaces vectoriels de $E$. On note $i : F \hookrightarrow E$ l'inclusion canonique et $\pi : E \to E/F$ la projection canonique.

**1.** Montrer que pour tout $\varphi \in E^*$, ${}^t i(\varphi)$ est la restriction de $\varphi$ à $F$.

**2.** Montrer que ${}^t\pi$ définit un isomorphisme canonique entre $(E/F)^*$ et $F^\perp$.

**3.** Montrer que $(F/G)^*$ s'identifie canoniquement à $G^\perp/F^\perp$.

## Exercice 2.

Soit $E$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles convergentes. Pour un entier $n \geqslant 0$, on définit $(e_n : u \mapsto u_n) \in E^*$. On pose enfin $F$ (*resp.* $G$) l'espace engendré par les $e_{2n}$ (*resp.* $e_{2n+1}$) pour $n \geqslant 0$.

**1.** Calculer $(F \cap G)^\top$.

**2.** Montrer que $F^\top + G^\top \neq (F \cap G)^\top$.

## Exercice 3.

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie et soit $u \in \mathrm{End}(E)$.

**1.** On pose $\mathrm{coker}(u) := E/\mathrm{Im}(u)$. Montrer que $(\mathrm{coker}(u))^* \cong \ker({}^t u)$.

**2.** Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$. Montrer que $F$ est stable par $u$ si et seulement si $F^\perp$ est stable par ${}^t u \in \mathrm{End}(E^*)$.

**3.** On prend $K = \mathbb{C}$, $E$ de dimension finie, et $u \in \mathrm{End}(E)$. Montrer que $u$ admet toujours un hyperplan stable.

**4.** On suppose que $u$ est diagonalisable (*resp.* trigonalisable). Montrer que ${}^t u$ est aussi diagonalisable (*resp.* trigonalisable). Expliciter une base de diagonalisation (*resp.* trigonalisation) de ${}^t u$.

**5.** Montrer que $u$ et ${}^t u$ ont le même polynôme caractéristique.

## Exercice 4.

Soient $E$ et $F$ des espaces vectoriels de dimension finie et soit $u : E \to F$ une application linéaire.

**1.** Montrer qu'il existe une famille $(w_1, \dots, w_n)$ de $F$ et une famille $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de formes linéaires de $E$ telles que

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i.$$

**2.** Montrer que le nombre minimal d'éléments $w_i$ nécessaires pour une telle écriture est le rang de $u$.

**3.** Soit $(w_1, \dots, w_r)$ une base de $\mathrm{Im}(u)$. Montrer qu'il existe une unique famille $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ telle que $u = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i w_i$.

**4.** Montrer qu'avec ces notations, $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ est une base de l'image de ${}^t u$.

### Exercice 5.

**1.** Soit

$$E_0 \xrightarrow{f_0} E_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{n-2}} E_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} E_n$$

une suite exacte d'espaces vectoriels. On rappelle que cela signifie que pour tout $i$, $E_i$ est un espace vectoriel, $f_i : E_i \to E_{i+1}$ est une application linéaire et

$$\ker(f_i) = \mathrm{Im}(f_{i-1}).$$

Montrer que la suite duale

$$E_n^* \xrightarrow{{}^t f_{n-1}} E_{n-1}^* \xrightarrow{{}^t f_{n-2}} \cdots \xrightarrow{{}^t f_1} E_1^* \xrightarrow{{}^t f_0} E_0^*$$

est exacte.

**2.** Soient $E$, $F$ deux espaces vectoriels, et soit $u : E \to F$ une application linéaire. Retrouver en utilisant des suites exactes les isomorphismes

$$\ker({}^t u) \cong \mathrm{coker}(u)^* \quad \text{et} \quad \mathrm{coker}({}^t u) \cong \ker(u)^*.$$

### Exercice 6.

Soit $\phi$ la forme bilinéaire de $K^2$ définie par

$$\begin{aligned} K^2 \times K^2 &\longrightarrow K \\ \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) &\longmapsto 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + x_2y_2 \end{aligned}$$

**1.** Calculer la matrice $A$ de $\phi$ dans la base $\mathcal{B} = \left( \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right)$.

**2.** Calculer la matrice $A'$ de $\phi$ dans la base $\mathcal{B}' = \left( \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \right)$.

**3.** Calculer la matrice de passage $P$ de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et vérifier que $A' = {}^t PAP$.

### Exercice 7.

Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels (pas forcément de dimension finie). Soit $\phi : E \times F \to K$ une forme bilinéaire. Montrer que $L_\phi$ et $R_\phi$ sont des isomorphismes si et seulement si les dimensions de $E$ et $F$ sont finies et égales, et $\phi$ est non dégénérée.

### Exercice 8.

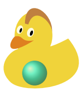
Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels de dimension finie, et soit $\phi : E \times F \to K$ une forme bilinéaire, et soit $u \in \mathrm{End}(E)$.

1. Montrer que $b$ est non dégénérée si et seulement si pour toute application linéaire $u \in \mathrm{End}(E)$, il existe une unique application linéaire $u^* \in \mathrm{End}(F)$ telle que pour tout $x \in E$ et $y \in F$,
$$\phi(u(x), y) = \phi(x, u^*(y)).$$
On appelle $u^*$, l'adjoint de $u$.
2. Vérifier que pour le crochet de dualité $\langle\ ,\ \rangle : E \times E^* \to K$, l'adjoint de $u$ est ${}^t u$.
3. On suppose $\phi$ non dégénérée. Prouver les identités suivante
$$\ker(u^*) = \mathrm{Im}(u)^{\perp,\phi}, \quad \mathrm{Im}(u^*) = \ker(u)^{\perp,\phi},$$
$$\text{et } \mathrm{rg}(u^*) = \mathrm{rg}(u).$$

**Exercice 9.**

Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels de dimension finie et soit $\phi : E \times F \to K$ une forme bilinéaire.

1. Montrer qu'il existe une unique forme bilinéaire
$$\overline{\phi} : E/\ker(L_\phi) \times F/\ker(R_\phi) \to K$$
telle que pour tout $x \in E$, $y \in F$, $\overline{\phi}(\overline{x}, \overline{y}) = \phi(x, y)$.
2. Montrer que $\overline{\phi}$ est non dégénérée.



**Exercice 10.**

Soit $\phi$ l'application définie par
$$\phi : \begin{array}{rcl} M_2(K) \times M_2(K) & \longrightarrow & K \\ (A, B) & \longmapsto & \det(A + B) - \det(A - B) \end{array}.$$

1. Montrer que $\phi$ est une forme bilinéaire et calculer sa matrice dans la base canonique $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$.
2. On suppose que $2 \neq 0$ dans $K$. Soit $F = \{A \in M_2(K), \mathrm{Tr}(A) = 0\}$. Calculer $F^{\perp,\phi}$. A-t-on $M_2(K) = F \oplus F^{\perp,\phi}$ ?

**Exercice 11.**

1. Montrer que l'application
$$\phi : \begin{array}{rcl} M_n(K) \times M_n(K) & \longrightarrow & K \\ (M, M') & \longmapsto & \mathrm{Tr}(MM') \end{array}$$
est une forme bilinéaire non dégénérée.
2. On suppose que $2 \neq 0$ dans $K$. Montrer que $S_n(K)^{\perp,\phi} = A_n(K)$ et que $A_n(K)^{\perp,\phi} = S_n(K)$.

**Exercice 12.**

Soient $\varphi$ l'application définie par
$$\varphi : \begin{array}{rcl} M_n(K) \times M_n(K) & \longrightarrow & K \\ (A, B) & \longmapsto & n\,\mathrm{Tr}(AB) - \mathrm{Tr}(A)\,\mathrm{Tr}(B) \end{array}.$$
On suppose que $n \neq 0$ dans $K$.

1. Montrer que $\varphi$ est une forme bilinéaire sur $E$.
2. Calculer $M_n(K)^{\perp,\varphi}$ et déterminer sa dimension. En déduire que $\varphi$ est dégénérée.
3. Soit $U \subset M_n(K)$ le sous-espace des matrices de trace nulle. Montrer que $\varphi_{|U}$ est non dégénérée.